1.2 逻辑函数的化简方法

1.2.1 逻辑函数的标准与或式和最简式

一、标准与或表达式

$$Y = F(A, B, C)$$

$$= ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C$$

标准与或式

最小项

标准与或式就是最小项之和的形式

1. 最小项的概念：

包括所有变量的乘积项，每个变量均以原变量或反变量的形式出现一次。

$Y = F(A, B)$ （2 变量共有 4 个最小项）

$\bar{A}\bar{B}$ $\bar{A}B$ $A\bar{B}$ AB

$Y = F(A, B, C)$ （3 变量共有 8 个最小项）

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ $\bar{A}\bar{B}C$ $\bar{A}B\bar{C}$ $\bar{A}BC$ $A\bar{B}\bar{C}$ $A\bar{B}C$ $AB\bar{C}$ ABC

（n 变量共有 2^n 个最小项）

2. 最小项的性质：

$A\ B\ C$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1

(1) 任一最小项，只有一组对应变量取值使其值为 1；

(2) 任意两个最小项的乘积恒为 0；

(3) 全体最小项之和恒为 1 。

3. 最小项的编号：

把与最小项对应的变量取值当成二进制数，与之相应的十进制数，就是该最小项的编号。常用 m_i 表示最小项。

对应规律：原变量 $\Leftrightarrow$ 1　　反变量 $\Leftrightarrow$ 0

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1
0	1	2	3	4	5	6	7
m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7

4. 最小项是组成逻辑函数的基本单元

任何逻辑函数都是都可以表示成最小项和的形式。且表达式唯一。

[例] 写出下列函数的标准与或式：

$$Y = F(A, B, C) = AB + \overline{A}C$$

[解] $Y = AB(\overline{C} + C) + \overline{A}C(\overline{B} + B)$

$$= \underset{m_6}{AB\overline{C}} + \underset{m_7}{ABC} + \underset{m_1}{\overline{A}\,\overline{B}\,C} + \underset{m_3}{\overline{A}BC}$$

$$= m_6 + m_7 + m_1 + m_3$$

或 $= \sum m(1, 3, 6, 7)$

标准与或表达式可由真值表直接写出(P17下部)。

[例] 写出F的标准与或表达式。

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$F=\overline{A}B+A\overline{B}+AB$$

作业

P68 思考题与习题

1.4（1）、 1.5（3）、
1.7 Y_4 、 1.8（1）

二、逻辑函数的最简表达式

- **最简与或表达式：**与项的个数最少，每个与项中的变量个数也最少的与或表达式。
- 如

$$Y = F(A,B) = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$
$$= A + B$$

其他表达式：

$$Y = \overline{\overline{AB}\cdot\overline{\overline{A}C}}$$ **与非与非**

$$Y = (A+C)(\overline{A}+B)$$ **或与或与**

$$Y = \overline{\overline{A+C}+\overline{\overline{A}+B}}$$ **或非或非**

1.2.2 逻辑函数的公式化简法

（与或式 $\xrightarrow[\text{定理}]{\text{公式}}$ 最简与或式）

一、并项法： $AB + A\overline{B} = A$

[例] $Y = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}B$

（书 p20）

$= AB + \overline{A}B \quad = B$

[例] $Y = ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}C$

$= A\,(BC + \overline{B}\,\overline{C}) + A\,(B\overline{C} + \overline{B}C)$

$= A \cdot \overline{B \oplus C} + A(B \oplus C)$

$= A$

二、吸收法: $A + AB = A$

[例] $Y = \overline{AB} + \overline{A}D + \overline{B}E$

（书 p20）

$$= \overline{A} + \overline{B} + \overline{A}D + \overline{B}E = \overline{A} + \overline{B}$$

[例] $Y = \overline{AB} + \overline{A}CD + \overline{B}CD$

$$= \overline{AB} + (\overline{A} + \overline{B})CD$$

$$= \overline{AB} + \overline{AB}\,CD = \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

三、消去法： $A+\overline{A}B=A+B$

[例] $Y=AB+\overline{A}C+\overline{B}C$

$=AB+(\overline{A}+\overline{B})C$

$=AB+\overline{AB}\,C=AB+C$

四、配项消项法：

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

[例]

$$Y=\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C+A\overline{C}+BC+AB$$

$$=\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C+AB$$

冗余项

冗余项

或

$$=\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C+A\overline{C}+BC+\overline{A}\,\overline{B}$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{C}+BC$$

公式法化简对公式、定理的掌握程度要求较高，含有一定的运算技巧，且有时较难判断结果是否为最简。

1. 2. 3 逻辑函数的图形化简法

一、逻辑变量的卡诺图(Karnaugh maps)

卡诺图： 最小项方块图(按循环码排列)

1. 二变量 的卡诺图(四个最小项)

$A \backslash B$	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

$A \backslash B$	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

$A \backslash B$	0	1
0	0	1
1	2	3

$A \backslash B$	0	1
0		
1		

2. 多变量卡诺图的画法

1.画出一个正方形或矩形，并分出2^n个小方块。

2.分配变量至行/列，且变量按循环码取值。

三变量 的卡诺图：八个最小项

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

四变量 的卡诺图：

十六个最小项

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

五变量 的卡诺图：

三十二个最小项

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

当变量个数超过六个以上时，无法使用图形法进行化简。

3. 卡诺图的特点：用几何相邻表示逻辑相邻

(1) 几何相邻：
- 相接 —— 紧挨着
- 相对 —— 行或列的两头
- 相重 —— 对折起来位置重合

(2) 逻辑相邻：两个最小项中只有一个变量形式不同

化简方法：逻辑相邻的两个最小项可以合并成一项，并消去一个因子。

例如 $\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}=(\overline{A}+A)B\overline{C}=B\overline{C}$

4. 卡诺图中最小项合并规律：

(1) 两个相邻最小项合并可以消去一个因子

A \ BC	00	01	11	10
0	0			
1	4			

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}=\overline{B}\,\overline{C}$$

(2) 四个相邻最小项合并可以消去两个因子

AB \ CD	00	01	11	10
00	0		3	2
01	4			
11	12			
10	8		11	10

$\overline{C}\,\overline{D}$　　$\overline{B}C$

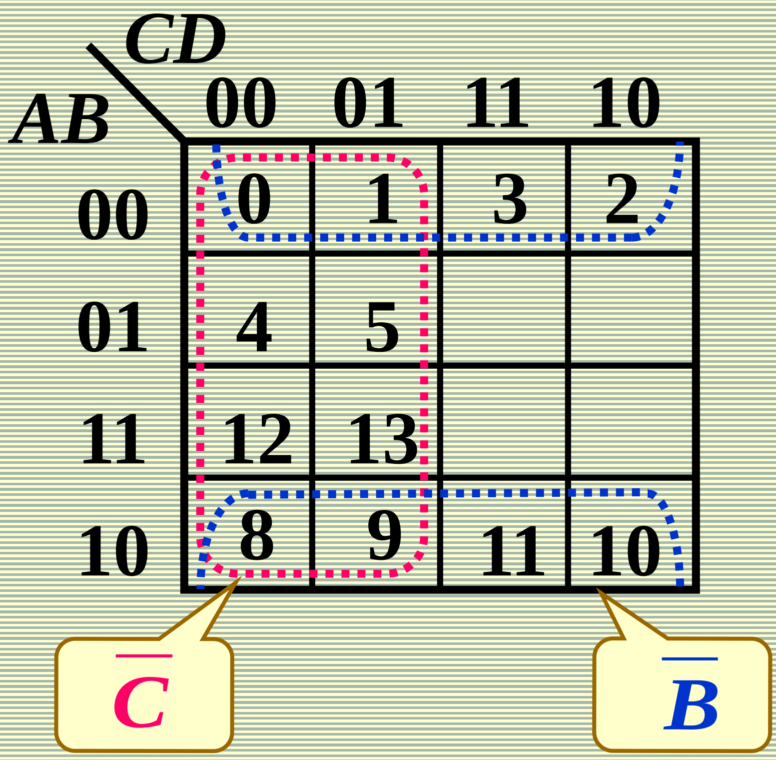
AB \ CD	00	01	11	10
00	0			2
01		5	7	
11		13	15	
10	8			10

$\overline{B}\,\overline{D}$　　BD

$$m_0 + m_4 + m_{12} + m_8$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \quad = \overline{C}\,\overline{D}$$

(3) 八个相邻最小项合并可以消去三个因子



总结： 2^n 个相邻最小项合并可以消去 n 个因子。
合并后的结果是 2^n 个最小项的公有部分。

二、逻辑函数的卡诺图表示法

1. 根据变量个数画出相应的变量卡诺图；

2. 在函数的每个乘积项所包含的最小项处填入 1，其余位置填 0 或不填。就得到了函数卡诺图。

[例]

$$Y = F(A, B, C) = AB + BC + AC$$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

三、用卡诺图化简逻辑函数

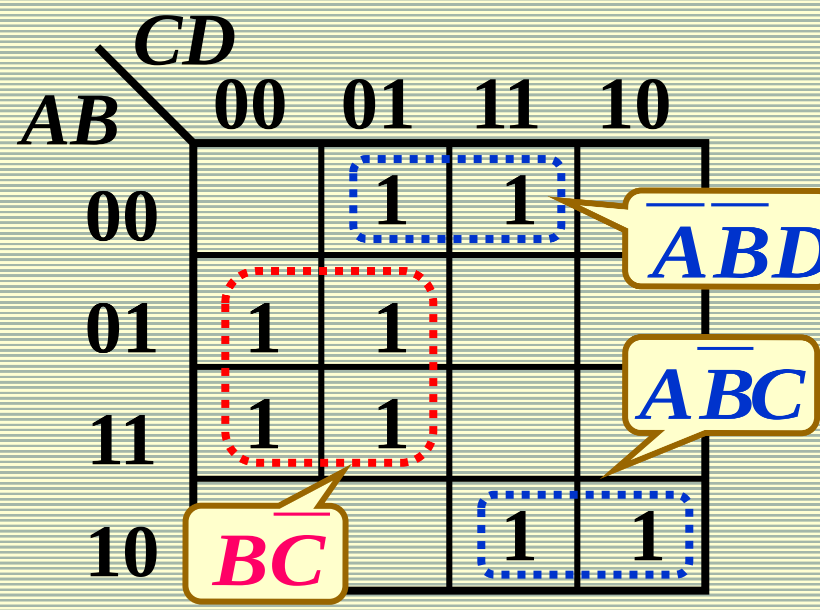
[例 1. 2. 14] $Y = \overline{B}CD + B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}D + A\overline{B}C$

[解] 化简步骤：

(1) 画函数的卡诺图

(2) 合并最小项：
画包围圈

(3) 写出最简与或表达式



$$Y = B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}D + A\overline{B}C$$

$$Y=\overline{B}CD+B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}D+A\overline{B}C$$

画包围圈的原则：

(1) 圈中1方格的个数为2^n。

(2) 圈越大越好，但圈的个数越少越好。

(3) 1方格可重复被圈，但每个圈中至少有一个自己独有的1方格。

(4) 必需把1方格全部圈完，并做认真比较、检查才能写出最简与或式。

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1		
11	1	1		
10			1	1

[例] 利用图形法化简函数

$$F(A,B,C,D)=\sum_m(1,4,5,6,8,12,13,15)$$

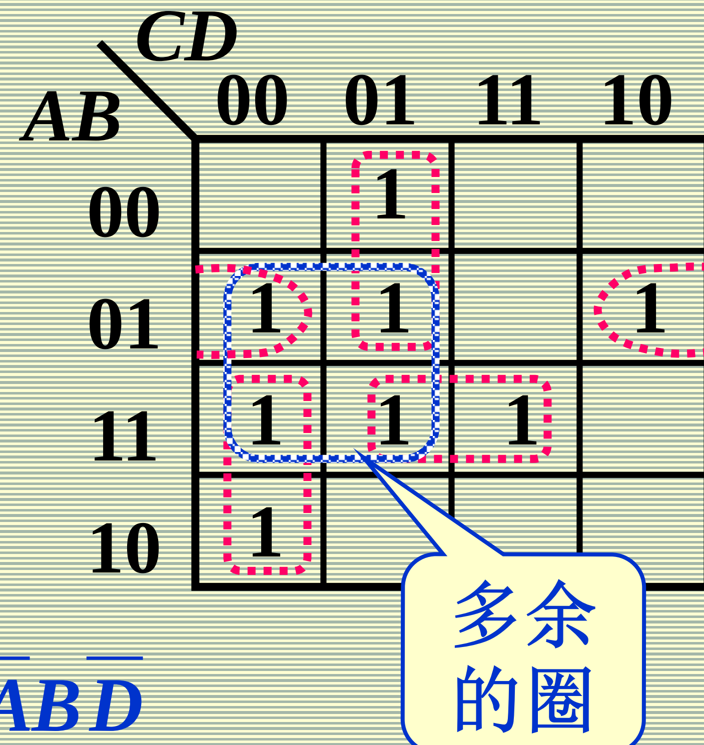
[解]

(1) 画函数的卡诺图

(2) 合并最小项:

画包围圈

(3) 写出最简与或表达式



$$Y=A\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{C}D+ABD+\overline{A}B\overline{D}$$

[例] 利用图形法化简函数

$$F=\sum\nolimits_m(0,1,2,3,4,8,10,11,14,15)$$

[解] (1) 画函数的卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1			
11			1	1
10	1		1	1

(2) 合并最小项：
画包围圈

(3) 写出最简与或
表达式

$$Y=\overline{A}\,\overline{B}+AC+\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}\,\overline{D}$$

[例] 圈0法求逻辑表达式

$$F = \overline{B} + C + D$$

$$\overline{F} = B\overline{C}\,\overline{D}$$

$$F = \overline{B\overline{C}\,\overline{D}}$$

$$= \overline{B} + C + D$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

1.2.4 具有约束的逻辑函数的化简

一、 约束的概念和约束条件

1. 约束、约束项、约束条件

(1) 约束： 输入变量间取值所受的限制

例如电梯运行状态监控电路。三个输入量A/B/C为1时，分别表示电梯在上行/下行/停止状态。则三输入变量组合中不应该出现：

000、011、101、110、111这些组合。

(2) 约束项： 不应该出现的变量取值所对应的最小项。

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$　　$\overline{A}BC$　　$A\overline{B}C$　　$AB\overline{C}$　　ABC

(3) 约束条件： 由约束项相加所构成的值为 0 的逻辑表达式。

例如，上例中 ABC 的约束条件为

约束条件： $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC=0$

或 $\sum d(0,3,5,6,7)=0$

2. 约束条件的表示方法

(1) 在真值表和卡诺图上用叉号 (×) 表示。

(2) 在逻辑表达式中，用等于 0 的条件等式表示。

二、具有约束的逻辑函数的化简——公式法

利用原则：用得着就用，用不着就算了。

如化简例1.2.15中的逻辑函数

$$\begin{cases} Y = ABC \\ \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C = 0 \end{cases}$$

解：

$$\begin{aligned} Y &= ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C \\ &= C(AB + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B}) \\ &= C \end{aligned}$$

于是逻辑函数可表示成：

$$\begin{cases} Y = C \\ \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C = 0 \end{cases}$$

二、具有约束的逻辑函数的化简——

即找出约束条件中包含的所有最小项

例 化简下列函数

$$\begin{cases} Y = AC + \overline{A}\,\overline{B}C \\ \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C} = 0 \end{cases}$$

约束条件

对逻辑化简没有帮助，即用不着不用

解：

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	×	1		×
1	×	1	1	

$$\begin{cases} Y = \overline{B} + AC \\ \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C} = 0 \end{cases}$$

- **2.变量互相排斥的逻辑函数的化简**
  - 在一组变量中，如果只要有一个变量取值为1，则其他变量的值就一定是0，有这种约束的变量，称为互相排斥的变量，即互斥变量。
  - 例　具有互斥变量的函数Y的真值表如下，试求其最简与或表达式。

ABC	Y
000	0
001	1
010	1
011	x
100	1
101	x
110	x
111	x

- 利用卡诺图进行化简

A \ BC	00	01	11	10
0		1	×	1
1	1	×	×	×

得 Y=A+B+C

故变量互斥的逻辑函数，真值表常采用简化形式。

	Y
A	1
B	1
C	1

作业

- P69　思考题与习题
- 1.9（1）（6）（10）、1.11（a）（d）
- 1.15（2）（6）